

Érettségi képlettár

Átlátható, rövid, érthető.

Minden fontos képlet egy helyen, hogy magabiztosan vágj neki a matekérettséginek.

Math
Sisters

Készült a MathSisters
közösségében.

Szia!

Ez a képlettár azért készült, hogy segítségedre legyen az érettségire való felkészülésben – stressz nélkül, világosan, élvezettel.

Habár a négyjegyű függvénytáblázatban minden benne van, gyakran érezheted azt, hogy elveszel a sok képlet között. Melyik képlet fontos neked? Melyiket kell használnom?

Átnéztük, összegyűjtöttünk és kategóriákba rendeztük a középszintű érettségi tananyagát, hogy könnyen eligazodj benne. Ebben az e-bookban megtalálsz minden fontos képletet, amire középszinten szükséged lehet.

Hisszük, hogy a matek nem bonyolult, csak sokszor rosszul van tálalva. Itt most másképp nézhetsz rá: nyugodtan, szépen, érthetően. Bármilyen szinten vagy most, lehet sikerélményed és lehet, hogy a végén magadat is megleped az eredményeddel.

Sok sikert az érettségihez és ne feledd: a tudásnál nincs könnyebb csomag a vizsgán.

Math Sisters

[@mathsisters](https://www.mathsisters.com)

Tartalom

Halmazok

03

Logika

04

Kombinatorika

06

Gráfok

07

Számelmélet

07

Algebra

09

Függvények

11

Geometria

15

Trigonometria

24

Koordinátageometria

25

Statisztika

27

Valószínűség-számítás

28

Halmazok

Elnevezések, összefüggések

Adott, ismert egy halmaz, ha mindenről el lehet dönteni, hogy eleme-e vagy sem.

Jelölések:

$a \in H$ — az a elem a H halmazhoz tartozik, annak eleme.

$x \notin T$ — az x elem nem tartozik a T halmazhoz, annak nem eleme.

Halmaz megadása:

- az elemek felsorolásával. Pl.: $\{0; 2; 4; 6; 8\}$ — a páros számjegyek halmaza.
- eldöntési szabállyal. Pl.: $\{x | E(x)\}$ — az $E(x)$ szabálynak megfelelő x elemek halmaza.

Egyenlő két halmaz akkor és csak akkor, ha ugyanazokból az elemekből állnak.

Venn-diagram: a halmazok egymás közötti viszonyát ábrázoló grafikon.

Részhalmaz:

Részhalmaza a Q halmaz egy H halmaznak, ha minden eleme H -nak is eleme: $Q \subseteq H \Leftrightarrow \forall x : (x \in Q \Rightarrow x \in H)$.

Valódi részhalmaz: $Q \subset H \Leftrightarrow (Q \subseteq H) \wedge (Q \neq H)$.

Üres halmaz, aminek nincsenek elemei: $\emptyset$.

Minden H halmazra igaz: $\emptyset \subseteq H$.

Univerzális halmaz (U): minden létezőt egyesítő halmaz.

Minden H halmazra igaz: $H \subseteq U$.

H halmaz véges, ha megszámlálható eleme van.

H halmaz végtelen, ha megszámlálhatatlan sok elemet tartalmaz.

Komplementer halmaz: A -nak H -beli komplementere
 $A^H = \{x | x \notin A \wedge x \in H\} = H \setminus A.$

Halmazműveletek

- $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$: A és B egyesítése (uniója),
- $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$: A és B metszete (közös része),
- $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$: A és B különbsége, különbségalmaza.

Logikai szita

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Logika

Jelölések, műveletek

Kijelentés: olyan kijelentő mondatok, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Egy kijelentésnek kétféle logikai értéke (vagy igazságértéke) lehet: igaz, vagy hamis.

Logikai műveletek: kijelentések összekapcsolása, műveletek kijelentésekkel.

Negáció (tagadás): az a logikai művelet, amely egy kijelentés igazságértékét ellentetté változtatja: az igazból hamis, a hamisból igazat csinál.

Konjunkció (és): két kijelentés ÉS-sel összekapcsolva. Az új kijelentés akkor igaz, ha mindkét kijelentés logikai értéke igaz, minden más esetben hamis.

Diszjunkció (megengedő vagy): két kijelentés VAGY-gyal összekapcsolva. Az új kijelentés akkor igaz, ha bármelyik vagy mindkét kijelentés logikai értéke igaz. Akkor hamis, ha mindkét kijelentés hamis.

Antivalencia (kizáró vagy): hasonló a VAGY művelethez. Az új kijelentés akkor igaz, ha a két bemenetének értéke különböző.

Implikáció (ha ..., akkor ...): amikor HA — AKKOR kapcsolattal két kijelentést összekapcsolunk, akkor új kijelentés keletkezik. Általános alakja: HA x , AKKOR y . Az implikáció logikai értéke hamis, ha a feltétel igaz, és a következmény hamis.

Ekvivalencia (akkor és csak akkor ...): logikai értéke akkor igaz, ha a két állítás logikai értéke megegyezik.

Univerzális kvantor (minden ...): minden x -re igaz, hogy ... állítások jele. Tagadása a "van olyan x , hogy nem ..."

Egzisztenciális kvantor (van olyan ...): van olyan x , hogy ... állítások jele. Tagadása a "minden olyan x -re igaz, hogy nem ..."

Kombinatorika

Permutáció (sorba rendezés)

Megadott n darab elem összes lehetséges sorrendjének a száma.

- ismétlés nélküli permutáció: minden elem különböző.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

- ismétléses permutáció: az elemek között vannak egyformák.

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Variáció (kiválasztás sorrendben)

Adott n darab elem közül k elem összes lehetséges sorrendje.

- ismétlés nélküli variáció: minden elem különböző.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ismétléses variáció: az elemek között vannak egyformák.

$$V_n^k = n^k$$

Kombináció (kiválasztás)

Adott n darab elem közül hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít.

- ismétlés nélküli kombináció: minden elem különböző. Másnéven

binomiális együttható.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- ismétléses kombináció: az elemek között vannak egyformák.

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Gráfok

Pont: a gráfban az elemeket ábrázoló pontok. Lehet felirat nélküli vagy címkézett.

Él: a csúcsokat összekötő vonalak, mely a csúcsok viszonyát, a közöttük lévő interakciókat jelölnék.

Fokszám: a csúcsból kiinduló élek száma.

$$\text{élek száma} = \frac{\text{fokszámok összege}}{2}$$

Számelmélet

Oszthatóság

Osztója a k egész az m egésznek — jelölése: $k \mid m$ —, ha:
 $k \mid m \Leftrightarrow \exists q : q \in \mathbb{N} \wedge q \cdot k = m$.

Többszöröse az m egész a k egésznek, ha k osztója m -nek: $k \mid m$.

Prímszám a $p > 1$ egész, ha csak 1 és p az osztója.

Összetett szám az m egész, ha 1-nél nagyobb és nem prím.

Két szám – m és n – **legnagyobb közös osztója** $l = \text{LNKO}$

$$(m; n) = (m; n)$$

Két szám – m és n – **legkisebb közös többszöröse** $k = \text{LKKT}$

$$(m; n) = [m; n]$$

Relatív prím két szám – m és n –, ha $\text{LNKO}(m; n) = 1$

Normálalak olyan exponenciális szorzatalak, ahol az egyik tényező meghatározott tartományba esik, míg a másik tényező 10 hatványa.

Abszolútérték a 0-tól való távolság a számegyenesen.

Oszthatósági szabályok

Egy m egész osztható

- 2-vel, ha utolsó jegye 0, 2, 4, 6 vagy 8
- 3-mal, ha a számjegyek összege osztható 3-mal
- 4-gyel, ha a két utolsó jegyből képzett szám osztható 4-gyel
- 5-tel, ha utolsó jegye 0 vagy 5
- 6-tal, ha 2-vel és 3-mal is osztható
- 8-cal, ha a három utolsó jegyből képzett szám osztható 8-cal
- 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel
- 10-zel, ha utolsó jegye 0
-

Számhalmazok

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Egész számok: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ pozitív egész számok halmaza, $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ a negatív egészek halmaza. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$ az egészek halmaza.

Racionális számok $\mathbb{Q}$:

- egész számok hányadosai (a 0 osztó kivétel)
- végtelen szakaszos tizedes- (helyiértékes) törtek.

Valós számok $\mathbb{R}$: a racionális és az irracionális számok.

Algebra

Hatványozás

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Pozitív egész kitevőjű hatvány: $a_n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ és $a_1 = a$.

Negatív egész és 0 kitevőjű hatvány: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}; \quad a^0 := 1$.

Azonosságok

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k} \quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \quad a^{nk} = a^{kn} = a^{n \cdot k}$$

$$a^n \cdot b^n = ab^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}^n \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Gyökvonás

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+; \forall n, k \in \mathbb{Z}; n, k \geq 2 \quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Racionális kitevőjű hatvány: $a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a}; \quad a^{\frac{n}{k}} := \sqrt[k]{a^n}$.

Azonosságok:

$$a \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}} \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[k]{a^n} = \sqrt[k]{a}^n = a^{\frac{n}{k}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Logaritmus

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a^{\log_a b} = b \quad \log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Azonosságok:

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \log_a (\sqrt[n]{x}) = (\log_a x) : n \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$$

Arányosság

- egyenes: a változás mértékével arányosan változik az érték,
- fordított: a változás mértékével ellentétesen változik az érték.

Százalékszámítás

$$\text{Rész} = \frac{\text{Százalék} \cdot \text{Egész}}{100}$$

$$\text{Százalék} = \frac{\text{Rész}}{\text{Egész}} \cdot 100$$

$$\text{Egész} = \frac{\text{Rész} \cdot 100}{\text{Százalék}}$$

•

Egyenletek

Elsőfokú egyenlet: $ax + b = 0$

Másodfokú egyenlet: $ax^2 + bx + c = 0$

Diszkrimináns: $D = b^2 - 4ac$

- Ha $D > 0$: két valós gyök.
- Ha $D = 0$: két egyező valós gyök.
- Ha $D < 0$: két komplex gyök.
-

Másodfokú egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Gyöktényezős alak: $a(x - x_1)(x - x_2)$, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.

Elsőfokú két ismeretlenes egyenletrendszer

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Helyettesítő módszer: $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$

Kiküszöbölés módszere: $\frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}$

Egyenlő együtthatók módszere: $(b_1a_2 - b_2a_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1)$

Négyzetgyökös egyenlet és megoldás

$$\sqrt[n]{x} = a \quad x = a^n$$

Logaritmus egyenlet és megoldása

$$a^x = b \quad x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Függvények

Függvény: olyan szabály, ami minden bemeneti értékhez (x) pontosan egy kimeneti értéket ($f(x)$) rendel.

Értelmezési tartomány: azoknak az x értékeknek a halmaza, amelyekre a függvény értelmezve van.

Értékkészlet: azoknak az $f(x)$ értékeknek a halmaza, amelyeket a függvény ténylegesen felvesz.

Hozzárendelés: az a szabály, amely meghatározza, hogy az egyes x értékekhez milyen $f(x)$ érték tartozik.

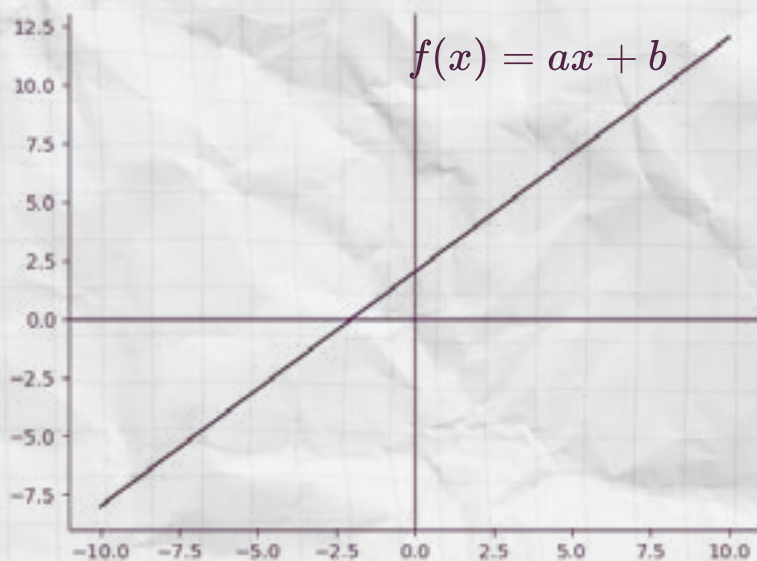
Képhalmaz: a lehetséges kimeneti értékek ($f(x)$ -ek) halmaza, amit a függvény felvehet (általában = értékkészlet).

Helyettesítési érték: egy konkrét x helyére beírva a függvénybe, kapott $f(x)$ érték.

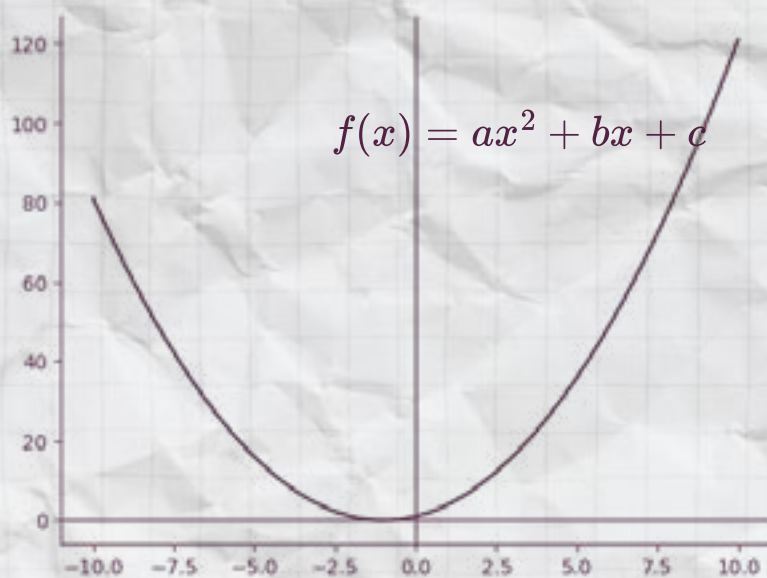
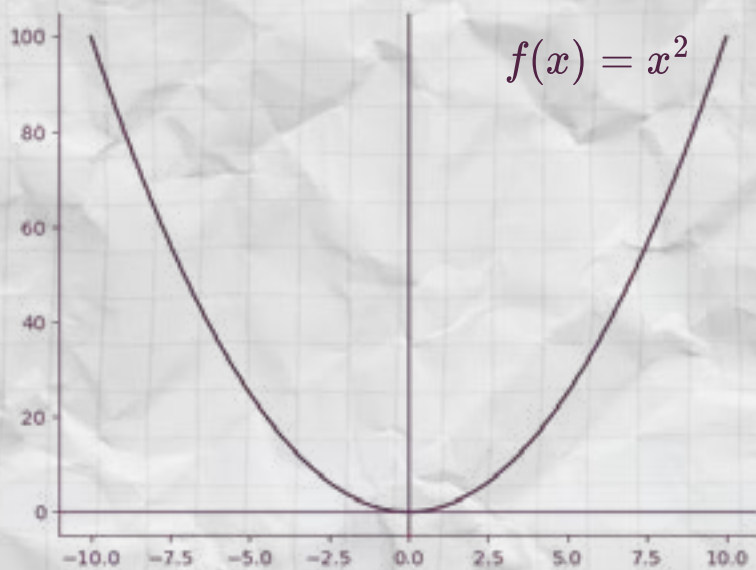
Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés: olyan hozzárendelés, ahol minden x -hez pontosan egy $f(x)$ tartozik, és minden $f(x)$ -hez pontosan egy x .

Zérushely: a függvénynek az a helye (x) ahol az eredmény ($f(x)$) nulla, vagyis ahol a függvény metszi az x-tengelyt.

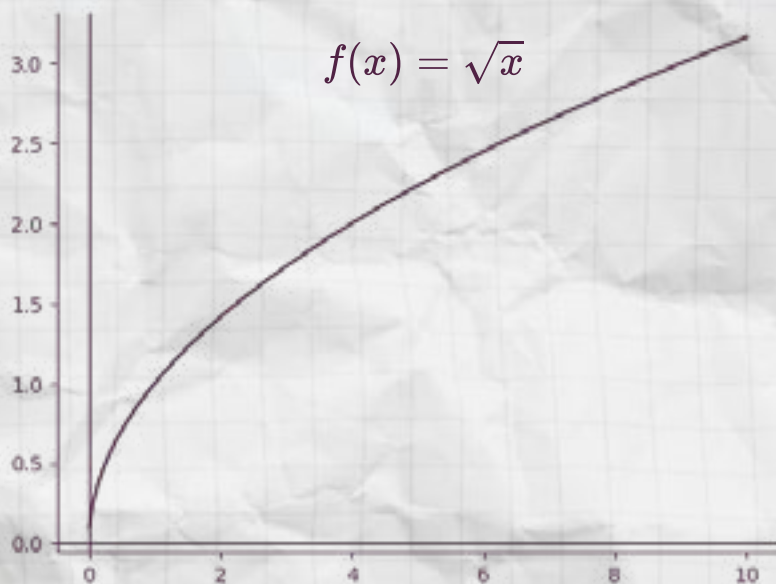
Elsőfokú, lineáris függvény



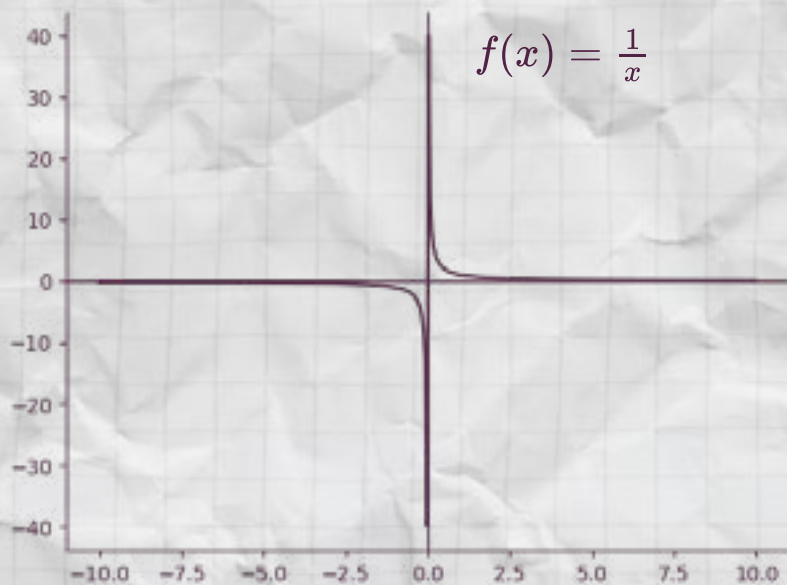
Másodfokú, parabola függvény



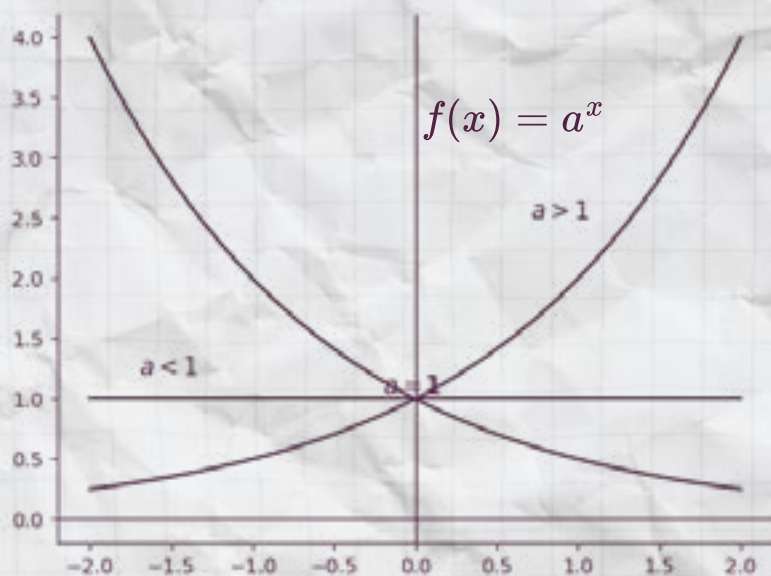
Gyökfüggvény



Reciprokfüggvény



Exponenciális függvény



Függvénytranszformációk:

- $y = f(x + a_0)$: eltolás az x tengely mentén $(-a_0, 0)$ vektorral.
- $y = f(a_1 x)$: az y tengelyre merőleges, $\frac{1}{a_1}$ arányú affinitás. Nyúlás, ha $|a_1| < 1$ és összenyomás, ha $|a_1| > 1$. Ha $a_1 = -1$, a függvény képe az y tengelyre tükröződik.
- $y = f(x) + b_0$: eltolás az y tengely mentén $(0, b_0)$ vektorral.
- $y = b_1 f(x)$: az x tengelyre merőleges, b_1 arányú affinitás. Nyúlás, ha $|b_1| > 1$ és összenyomás, ha $|b_1| < 1$. Ha $b_1 = -1$, a függvény képe az x tengelyre tükröződik.

Sorozatok

Jelölések:

- a sorozat: $\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$
- a sorozat tagjai: a_n, a_k
- az a_n és a_k tagok indexe:
- első n tag összege: S_n

Általános tag:

- számtani sorozat: $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- mértani sorozat: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Első n tag összege:

- számtani sorozat: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
- mértani sorozat: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$

Kamatszámítás n, k

Kamatos kamat:

- T_0 induló tőke n év alatt felnövekedett értéke: $T_n = T_0 \left(\frac{100+p}{100} \right)^n$
- T_0 induló tőke n év alatt amortizálódott értéke: $T_n = T_0 \left(\frac{100-p}{100} \right)^n$
- T_0 induló tőke $p\%$ -kal diszkontált értéke: $T_0 = T_n \left(\frac{100}{100+p} \right)^n$
- a járadék n év alatt felnövekedett értéke: $S_n = \frac{100a}{p} (q^n - 1)$

Geometria

Tételek: a pont, az egyenes, a sík.

Szögek

Egy pontból induló két félegyenes a síkot két szögtartományra bontja. A szög szárai a szögtartományokat határoló félegyenesek. A szög csúcsa a szárak közös kezdőpontja. A szögvonalat a szögtartományt kijelölő félegyenesek alkotják.

Típusai:

- az egyenesszög két szára egy egyenest alkot, a szögtartományok félsíkok,
- derékszög: az egyenesszög fele, szögtartománya a „negyedsík”,
- hegyesszög kisebb a derékszögnél,
- tompaszög nagyobb a derékszögnél, de kisebb az egyenesszögnél,
- nullszög szárai egybeesnek, a szögtartományt ezeknek a pontjai alkotják,
- teljesszög szárai egybeesnek, a szögtartomány a teljes sík,
- konvex szög a null-, a hegyes-, a derék-, a tompa- és az egyeneszszög,
- konkáv szög nagyobb az egyenesszögnél.

Szögpárok:

- mellékszögek szögtartományai együtt egy félsíkot alkotnak,
- csúcsszögek szárai páronként egymás meghosszabbításai,
- egyállású szögek szárai azonos irányú párhuzamos félegyenesek,
- váltószögek szárai ellentétes irányú párhuzamos félegyenesek,
- pótszögek összege egy derékszöggel egyenlő,
- kiegészítő szögek összege egy egyenesszög = két derékszög.

Tételek távolsága és szöge

Pont – Pont

- távolsága: a két pont közötti egyenes szakasz hossza.

Pont – Egyenes

- távolsága: a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

Pont – Sík

- távolsága: a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

Egyenes – Egyenes

- távolsága: ha párhuzamosak vagy kitérők, akkor a két egyenes közötti legrövidebb (merőleges) távolság. Ha metszik egymást, akkor a távolságuk 0,
- szöge: a két egyenes által bezárt szög (metszéspontjukban mért szög).

Egyenes – Sík

- távolsága: ha az egyenes párhuzamos a síkkal, akkora távolság a tetszőleges pontjából a síkra bocsátott merőleges hossza. Ha metszi a síkot, akkor a távolságuk 0,
- szöge: az egyenes és a sík által bezárt szög az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög komplementere.

Sík – Sík

- távolsága: ha párhuzamosak, akkor bármely pontjuk közötti merőleges szakasz hossza. Ha metszik egymást, távolságuk 0,
- szöge: a két sík által bezárt szög a metszésvonalukhoz tartozó normálisok által bezárt szög.

Geometriai transzformációk

Eltolás (párhuzamos eltolás): az eltolást az irányával és a nagyságával, az eltolásvektorral adjuk meg. Fixelemek: az eltolás irányával párhuzamos egyenesek.

Elforgatás (pont körüli forgatás): az elforgatást a középponttal, az elforgatás irányával és szögével adjuk meg. Fixelem: a középpont.

Tükrözés egyenesre (tengelyes tükrözés): a tükrözést a tengelyével adjuk meg. Fixelemek: a tengely pontonként, a tengelyre merőleges egyenesek.

Tükrözés pontra (középpontos tükrözés): a tükrözést a centrumával adjuk meg. Fixelem: a centrum és arra illeszkedő egyenesek. Középpontos hasonlóság (homotécia): a centrumával és a hasonlóság arányával adjuk meg. Ha $|k| > 1$: nagyítás, ha $|k| < 1$: kicsinyítés, ha $k = 1$: identitás. Ha $k < 0$: középpontos tükrözés és egy nagyítás/kicsinyítés/ identitás egymásutánja.

Merőleges affinitás: a merőleges affinitást a tengelyével és az affinitás arányával adjuk meg. Ha $|k| > 1$: nyújtás, ha $|k| < 1$: összenyomás, ha $k = 1$: identitás. Ha $k < 0$: tengelyes tükrözés és egy nyújtás/összenyomás/identitás egymásutánja. Fixelemek: a tengely pontonként és a tengelyre merőleges egyenesek.

Két háromszög egybevágó, ha:

- mindhárom oldaluk megegyezik,
- két oldal és a közrezárt szög megegyezik,
- egy oldal és két szomszédos szög megegyezik.

Két háromszöghasonló, ha:

- a három szög egyenlő (szögeik megegyeznek),
- két szög megegyezik,
- két oldal aránya megegyezik és a közbezárt szög is,
- az oldalpárok aránya megegyezik.

Hasonló síkidomok aránya (k)

Terület, felszín aránya: k^2 , a nagyobb alakzat területe, felszíne k^2 -szer akkora, mint a kisebbé.

Térfogat aránya: k^3 , a nagyobb alakzat térfogata k^3 -szer akkora, mint a kisebbé.

Síkidomok, testek

Síkidom: zárt, egyenes vonallal határolt alakzata síkban.

- háromszögek: 3 oldalú síkbeli alakzat,
- négyszögek: 4 oldallal rendelkező alakzat a síkban,
- többszögek: 5 vagy több oldalú (pl. ötszög, hatszög stb.),
- görbevonallú síkidomok: kör, körcikk, körszelet, ellipszis.

Test: zárt, lapokkal határolt alakzata térben.

- sokszög alapú testek (szabályos testek): hasábok (téglatest, kocka, általános hasáb),
- gúlák: négyzet alapú gúla, háromszög alapú gúla, szabályos gúla,
- forgástestek: henger, kúp, gömb.

Háromszögek

Három egyenes szakasszal határolt síkrész.

- kerület: $K = 2s = a + b + c$
- terület: $T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$

Csoportosítás oldalaik szerint:

- egyenlő oldalú háromszög: minden oldala egyenlő és minden szöge 60° ,
- egyenlő szárú háromszög: két oldala egyenlő és két alapszöge is egyenlő,
- általános háromszög: minden oldala különböző hosszú és minden szöge is különböző.

Csoportosítás szögek szerint:

- hegyes szögű háromszög: minden szöge kisebb 90° -nál,
- derékszögű háromszög: egy szöge pontosan 90° ,
- tompaszögű háromszög: egy szöge nagyobb 90° -nál.

Háromszög egyenlőtlenség: bármely két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hosszúsága.

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

A belső szögek összege az egyenesszöggel egyenlő:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$$

A külső szögek összege a teljesszöggel egyenlő:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi = 360^\circ$$

A külső szög a másik két belső szög összegével egyenlő:

$$\alpha' = \beta + \gamma \quad \beta' = \alpha + \gamma \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

A nagyobb oldallal szembeni szög nagyobb és a nagyobb szöggel szembeni oldal nagyobb: $a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Spaciális háromszögek tulajdonságai:

- egyenlő oldalú háromszög: minden oldala egyenlő hosszúságú, minden szöge 60° , tengelyesen szimmetrikus (három szimmetriatengelye van), beírható és köré írható kör középpontja egybeesik,

- egyenlő szárú háromszög: két oldala (a szárak) egyenlők, a két alapon fekvő szög egyenlő, tengelyesen szimmetrikus (az alap felezőmerőlegese a szimmetriatengely), magasság, súlyvonal, szögfelező és szimmetriatengely egybeesik a szárak közötti szögben,
- derékszögű háromszög: egy szöge 90° , a két rövidebb oldal a befogók, a leghosszabb az átfogó, **Pithagorasz-tétel:** $a^2 + b^2 = c^2$, az átfogóra írt kör áthalad a derékszögű csúcson, ha egyenlő szárú is: akkor a két befogó egyenlő ($45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ háromszög).

Az oldalfelező merőleges a háromszög oldalának felezőpontjában emelt merőleges egyenes. A háromszög körülírt köre a három csúcsponton megy keresztül, O középpontja az oldalfelező merőlegesek egyetlen közös pontja.

A szögfelezők a csúcsra illeszkedő, a belső vagy a külső szöget felező félegyenesek. A beírt kör a belső szögfelezők egyetlen közös K pontja körül írt, az oldalakat érintő kör. A belső szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában metszi.

A magasságvonal a háromszög csúcsából a szemköztes oldalegyenesére bocsátott merőleges szakasz. Az M magasságpont a három magasságvonal egyetlen közös pontja.

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes szakasz. Az S súlypont a három súlyvonal egyetlen közös pontja. A súlypont mindegyik súlyvonalat $2 : 1$ arányban osztja, a csúcshoz közelebbi szakasz a nagyobb. A középvonalak az oldalfelezőpontokat összekötő szakaszok.

Négyszögek

Trapéz: van párhuzamos oldalpárja. Ezek a trapéz alapjai, a másik kettő a két szára.

- kerület: $K = a + b + c + d$
- terület: $T = \frac{a+c}{2}m = km$

Deltoid: két-két szomszédos oldala egyenlő. Átlói merőlegesek, egyikre szimmetrikus. Ez a másiknak felezőmerőlegese.

- kerület: $K = 2(a + b)$
- terület: $T = \frac{e}{2}f$

Paralelogramma: mindkét szemköztes oldalpárja párhuzamos. Szemköztes oldalpárjai, szögpárjai egyenlők, középpontosan szimmetrikus.

- kerület: $K = 2(a + b)$
- terület: $T = am = ab \sin \alpha$

Téglalap: derékszögű paralelogramma. Átlói egyenlők, két tengelyre szimmetrikus.

- kerület: $K = 2(a + b)$
- terület: $T = ab$

Rombusz: egyenlő oldalú paralelogramma. Átlói merőlegesek, ezekre szimmetrikus.

- kerület: $K = 4a$
- terület: $T = \frac{e}{2}f = a^2 \sin \alpha$

Négyzet: egyenlő oldalú és egyenlő szögű paralelogramma. Négy szimmetriatengelye van.

- kerület: $K = 4a$
- terület: $T = a^2 = \frac{d^2}{2}$

Húrnégyszög: csúcsai egy körre illeszkednek. Szemköztes szögpárjainak összege: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

- kerület: $K = 2s = a + b + c + d$
- terület: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Érintőnégyyszög: oldalai egy kört érintenek. Szemköztes oldalpárjainak összege megegyezik: $a + c = b + d$.

- kerület: $K = 2s = a + b + c + d$
- terület: $T = sr$

A négyszög belső szögeinek összege egy teljesszöggel egyenlő:
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi = 360^\circ$

A négyszög külső szögeinek összege egy teljesszöggel egyenlő:
 $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 2\pi = 360^\circ$

Kör

Egy ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban. Ez a távolság a sugár, ami az átmérő fele. A kör részei: sugár, átmérő, húr, ív, szelő, érintő, körcikk, körlap. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Külső pontból húzott érintőszakaszok a körhöz egyenlő hosszúak.

- kerület: $K = 2\pi r = \pi d$
- terület: $T = \pi r^2 = \frac{d^2}{4}$

Körcikk: a kör egy szelete, amelyet két sugár és a közrezárt körív határol.

- kerület: $i = \frac{\alpha}{180} \cdot r \cdot \pi$
- terület: $T = \frac{1}{2} i r = \frac{\alpha}{360} \cdot r^2$

Körszelet: a körnek az a része, amelyet egy húr és a hozzá tartozó körív határol.

- kerület: $m = r - \frac{\sqrt{4r^2 - h^2}}{2} = r - r \cos \alpha$
- terület: $T = \frac{i \cdot r - h(r - m)}{2}$

Körgyűrű: két közös középpontú kör közti terület, vagyis egy nagyobb körből kivágott kisebb kör.

- kerület: $K = 2\pi(R + r)$
- terület: $T = \pi(R^2 - r^2)$

A kör egy ívéhez (és a vele egyenlő ívekhez) tartozó **kerületi szögek** egyenlők. Az ívhez tartozó középponti szög a megfelelő kerületi szögeknek a kétszerese.

Thalész tétele: Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy szakasz derékszögben látszik, két olyan nyílt félkör, amelyeknek a szakasz az átmérője. Általánosan: azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy szakasz $0 < \alpha < 180^\circ$ szögben látszik, két nyílt félkörív, amelyeknek a szakasz egy közös húrja.

Térbeli alakzatok

Hasáb: olyan test, amelynek két, egymással párhuzamos és egybevágó alaplaját téglalap alakú oldallapok kötik össze.

- alaplapok: azonos, párhuzamos sokszögek,
- oldallapok: téglalapok (oldallapok száma = alaplap oldalainak száma),
- élek: ahol két lap találkozik,
- csúcsok: ahol élek találkoznak,
- magasság: a két alap közti távolság.

Ferde hasáb:

- felszín: $A = 2T + P$
- térfogat: $V = Tm$

Egyenes hasáb:

- felszín: $A = 2T + km$
- térfogat: $V = Tm$

Téglatest:

- felszín: $A = 2(ab + bc + ca)$
- térfogat: $V = abc$

Forgás henger: olyan forgástest, amely egy kör síkbeli elforgatásával keletkezik egy vele párhuzamos egyenes mentén.

- alaplapok: két egyenlő kör,
- palást: téglalappá fejthető görbült felület,
- tengely: az alapok középpontját összekötő szakasz,
- magasság: az alaplapok közti távolság,
- alkotó: a paláston végigfutó egyenes szakasz.
- felszín: $A = 2\pi r(r + m)$
- térfogat: $V = \pi r^2 m$

Gúla: olyan test, amelynek alapja tetszőleges sokszög, oldallapjai pedig a csúcsból az alap oldalaihoz húzott háromszögek.

- alaplap: tetszőleges sokszög,
- oldallapok: a csúcsból kiinduló háromszögek,
- csúcs: a tetőpont, ahol minden oldallap találkozik,
- élek: az alap és az oldallapok határvonalai,
- magasság: a csúcsból az alap síkjára bocsátott merőleges.

Általános gúla:

- felszín: $A = T + P$
- térfogat: $V = \frac{Tm}{3}$

Csonkagúla:

- felszín: $A = T + t + P$
- térfogat: $V = \frac{m(T + \sqrt{Tt} + t)}{3}$

Forgás kúp:

- felszín: $A = \pi r(r + a)$
- térfogat: $V = \frac{\pi r^2 m}{3}$

Csonkakúp:

- felszín: $A = \pi[R^2 + r^2 + a(R + r)]$
- térfogat: $V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

Gömb:

- felszín: $A = 4\pi R^2 = \pi d^2$
- térfogat: $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6}$

Trigonometria

Szögfüggvények

A derékszögű háromszögben az α hegyesszög szögfüggvényei:

- szinusz: szöggel szemközti befogó és átfogó hányadosa $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- koszinusz: szög melletti befogó és átfogó hányadosa $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- tangens: szöggel szemközti befogó és szög melletti befogó hányadosa $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
- kotangens: szög melletti befogó és szemközti befogó hányadosa $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

Szögfüggvények értékei:

- síknegyedekre bontva:

$0^\circ \dots 90^\circ$	$90^\circ \dots 180^\circ$	$180^\circ \dots 270^\circ$	$270^\circ \dots 360^\circ$
$\sin \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha)$	$-\sin(\alpha - 180^\circ)$	$-\sin(360^\circ - \alpha)$
$\cos \alpha$	$-\cos(180^\circ - \alpha)$	$-\cos(\alpha - 180^\circ)$	$\cos(360^\circ - \alpha)$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$	$\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ)$	$-\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$	$-\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$

- nevezetes szögek:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Szögfüggvények összefüggései:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- szinusztétel: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, ahol R a körülírt kör sugara
- koszuszusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Koordináta geometria

Vektorok

Vektorok koordinátái: $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a} = a(x; y), (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Műveletek:

- összeadás: $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}$
- kivonás: $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j}$
- skalárral való szorzás: $\lambda \mathbf{a} = \lambda x \mathbf{i} + \lambda y \mathbf{j}$
- abszolútérték: $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- skaláris szorzat: $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Két pont távolsága: $d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Felezőpont koordinátái: $F(x_f; y_f) : x_f = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_f = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Egyenes

Egyenes egyenlete: $y = mx + b$, ahol $m = \operatorname{tg} \alpha$, ha $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $x = a$.

Két egyenes metszéspontját úgy kapjuk, hogy a két egyenest egyenlővé tesszük: $m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$, ebből x -et kifejezve:
$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}.$$

Két egyenes párhuzamos, ha $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$; $m_1 = m_2$.

Két egyenes merőleges, ha $A_1 \cdot A_2 = -B_1 \cdot B_2$; $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Kör

Kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$, ha $K(0, 0)$ a középpont. Általánosan $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$, ahol $K(u, v)$ a kör középpontja.

Statisztika

Oszlopdiagram: az abszcisszatengely tetszőleges pontjaiban azonos alapú és a gyakoriságokkal arányos magasságú téglalapok, 3 dimenziós oszlopok, alakok alkotják.

Kördiagram: a gyakoriságokkal arányos középponti szögű körcikkkel ábrázolják, a körcikk belső szöge: $\forall i : c_i = \frac{360^\circ}{n} g_i = 360^\circ f_i$.

Sodrófa diagram: az adatok eloszlását egy vízszintes tengely mentén elhelyezkedő téglalap (a doboz) és az abból kiinduló „sodrófa” szárai (azaz kilógó vonalak) szemléltetik, amelyek a minimumot, alsó és felső kvartilist, mediánt és maximumot jelölik.

Átlag: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Kvartilisek: a rendezett adatsort 4 egyenlő részre tagolják.

Medián: a nagyság szerint rendezett adatsor

- középső eleme, ha n páratlan,
- a két középső elem átlaga, ha n páros.

Módus: a rendezett gyakorisági sor maximumhelye.

Terjedelem: a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége.

Szórás: a variancia négyzetgyöke $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(x_2 - \bar{x})^2}$

Valószínűség - számítás

Elemi esemény: egy kimenetelű, egyféleképpen bekövetkező esemény.

Összetett esemény: két vagy több esemény vagylagos, illetve együttes bekövetkezése.

$A \cup B$: a két eseményből legalább az egyik bekövetkezik,

$A \cap B$: mindkét esemény bekövetkezik.

Komplementer esemény: $\bar{E}$, akkor következik be, ha az E esemény nem.

Egymást kizáró események: $A \cap B = \emptyset$.

Független események A és B , ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Klasszikus valószínűségi modell: az E esemény valószínűsége a kedvező és a lehetséges kimenetek számának hányadosa, $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

A komplementer események valószínűségének összege

$$\forall E \in \wp(\Omega) : P(E) + P(\bar{E}) = 1.$$

Várható érték az összes lehetséges kimenet értékét megszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűségekkel, majd ezeket összeadjuk

$$M(\xi) = \mu, \mu = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k$$

Készönjük!

Az Érettségi képlettár a 2025-ben érvényes érettségi követelmények alapján készült, a hivatalos négyjegyű függvénytáblázat tartalmára építve.

Minden képlet és rendezés azt a célt szolgálja, hogy könnyebben átlásd, mit érdemes tudni és magabiztosnak érezd magad a felkészülés során.

Ne feledd: a képletek önmagukban nem oldják meg a példákat, de ha érted őket és jól használod, kulcsot adnak a megoldáshoz.

Ha szeretnél még több segítséget vagy velünk készülnél a vizsgára, szeretettel várunk.

MathSisters

[@mathsisters](https://www.instagram.com/mathsisters)

MathSisters - 2025